Série 12 - Dynamique du solide avec un axe fixe

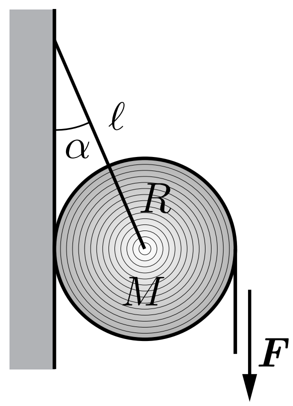
1 Rouleau de papier

Objectif : Modéliser le mouvement de rotation d'un solide indéformable.

Théorie : 3.1.1 Frottements secs ; 12.2 Dynamique du solide indéformable.

Examen : Problème d'examen.

Un rouleau de papier de rayon R est suspendu par deux barres rigides de longueur ℓ orientées selon un angle α par rapport au mur. Le rouleau est un cylindre homogène et plein de masse M et de moment d'inertie $I_G = \frac{1}{2}\, M\, R^2$ par rapport à son axe de rotation. Une force verticale constante $\boldsymbol{F}$ est exercée sur l'extrémité inférieure du papier afin de le tirer vers le bas. Un frottement cinétique sec de coefficient μ_c s'exerce entre le papier et le mur. La variation de masse et d'épaisseur du rouleau lorsqu'il se déroule est considérée comme négligeable.



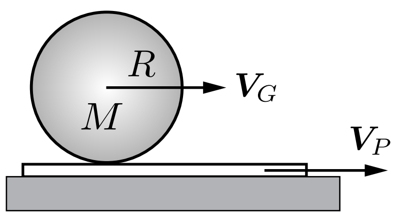
(a) Déterminer l'accélération angulaire $\ddot{\psi}$ de rotation propre du rouleau en fonction de la norme F de la force exercée sur le papier.

2 Cylindres sur une feuille de papier

Objectif : Modéliser le mouvement de translation et de rotation d'un solide indéformable.

Théorie : 12.1 Cinématique du solide indéformable ; 12.2 Dynamique du solide indéformable.

Deux cylindres de masse M, de rayon R et de moment d'inertie $I_G = \lambda\, M\, R^2$. Un cylindre est plein, c'est-à-dire $\lambda = \frac{1}{2}$, et l'autre est creux, c'est-à-dire $\lambda = 1$. Ils sont posés sur une feuille de papier initialement au repos.



La feuille est tirée avec une vitesse $\boldsymbol{V}_P$. Les cylindres se mettent alors à rouler alors sans glisser sur le papier.

(a) Exprimer la vitesse angulaire scalaire $\dot{\psi}$ de rotation propre des cylindres, en fonction de la norme V_P de la vitesse du papier et de la norme V_G de la vitesse du centre de masse du cylindre.
(b) Déterminer l'accélération angulaire salaire $\ddot{\psi}$ de rotation propre des cylindres en fonction de la norme A_P de l'accélération du papier.
(c) Identifier le cylindre le plus rapide.

3 Cylindres couplés oscillant sur un plan incliné

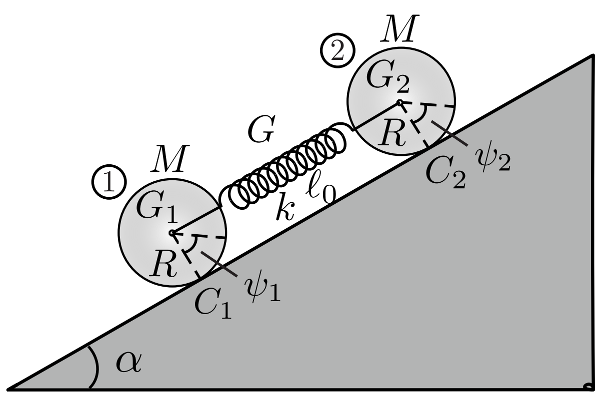
Objectif : Modéliser le mouvement d'un système de solides indéformables.

Théorie : 12.2 Dynamique du solide indéformable ; 12.3.2 Moments d'inertie et axes principaux d'inertie.

★ **Examen** : Problème d'examen.

Deux cylindres identiques de masse M et de rayon R roulent sans glisser sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Soient C_1 et C_2 les points de contact entre les cylindres et le plan incliné. Les axes de symétries horizontaux des cylindres passant par leurs centres de masses G_1 et G_2 sont liés par un ressort de constante élastique k et de longueur à vide ℓ_0. Les moments d'inertie des cylindres par rapport aux points de contact s'écrivent,

$$I_{C_1} = I_{C_2} = (\lambda + 1)\, MR^2 \qquad \text{où} \qquad \frac{1}{2} \leqslant \lambda \leqslant 1\,.$$



Les conditions initiales pour le mouvement du centre de masse des deux cylindres sont,

$$X_{G_1}(0) = -\,X_{G_2}(0) = \ell_0 \qquad \text{et} \qquad \dot{X}_{G_1}(0) = \dot{X}_{G_2}(0) = 0\,.$$

(a) Déterminer les accélérations angulaires scalaires $\ddot{\psi}_1$ et $\ddot{\psi}_2$ des deux cylindres.

(b) Déterminer les équations du mouvement des centres de masse G_1 et G_2 des deux cylindres.

(c) Déterminer l'équation horaire de la coordonnée d'abscisse $X_G(t)$ du centre de masse G du système formé des deux cylindres.

(d) Déterminer l'équation horaire de la coordonnée d'abscisse relative $X(t)$ du système formé des deux cylindres en termes de la masse réduite μ.